

Sur la capitulation des 2-classes d'idéaux du corps $\mathbb{Q}(\sqrt{2p_1p_2}, i)$

Abdelmalek Azizi, Abdelkader Zekhnini, FS, Oujda et
Mohammed Taous, FST, Errachida

Abstract—Let p_1 and p_2 be different primes such that $p_1 \equiv p_2 \equiv 1 \pmod{4}$ and at least two of the three elements $\{(\frac{2}{p_1}), (\frac{2}{p_2}), (\frac{p_1}{p_2})\}$ are equal to -1. Put $i = \sqrt{-1}$, $d = 2p_1p_2$ and $k = \mathbb{Q}(\sqrt{d}, i)$. Let $k_2^{(1)}$ be the Hilbert 2-class field of k and $k^{(*)} = \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \sqrt{2}, i)$ be its genus field. Let $C_{k,2}$ denote the 2-part of the class group of k . The unramified abelian extensions of k are $K_1 = k(\sqrt{p_1})$, $K_2 = k(\sqrt{p_2})$, $K_3 = k(\sqrt{2})$ and $k^{(*)}$. Our goal is to study the capitulation problem of the 2-classes of k in these four extensions.

Résumé—Soient p_1 et p_2 deux nombres premiers tels que $p_1 \equiv p_2 \equiv 1 \pmod{4}$ et au moins deux des éléments $\{(\frac{2}{p_1}), (\frac{2}{p_2}), (\frac{p_1}{p_2})\}$ valent -1. Soient $i = \sqrt{-1}$, $d = 2p_1p_2$, $\mathbb{k} = \mathbb{Q}(\sqrt{d}, i)$, $\mathbb{k}_2^{(1)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de \mathbb{k} et $\mathbb{k}^{(*)}$ le corps de genres de \mathbb{k} . Notons par $C_{\mathbb{k},2}$ la 2-partie du groupe de classes de \mathbb{k} . Les extensions abéliennes sur \mathbb{Q} et non ramifiées sur \mathbb{k} sont $K_1 = \mathbb{k}(\sqrt{p_1})$, $K_2 = \mathbb{k}(\sqrt{p_2})$, $K_3 = \mathbb{k}(\sqrt{2})$ et $\mathbb{k}^{(*)} = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, i)$. Dans ce papier on s'intéresse à étudier le problème de capitulation des 2-classes de \mathbb{k} dans ces quatre extensions.

Mots clés—2-groupe de classes, corps de classes de Hilbert, corps de genre, capitulation.

Oujda
janvier 26, 2012

I. INTRODUCTION

Soient k un corps de nombres de degré fini sur \mathbb{Q} , K une extension non ramifiée de k et p un nombre premier. La recherche des idéaux de k qui capitulent dans K a été l'objet d'étude d'un grand nombre de mathématiciens. Dans le cas où K est égal au corps de classes de Hilbert $k^{(1)}$ de k , D. Hilbert avait conjecturé que toutes les classes de k capitulent dans $k^{(1)}$ (théorème de l'idéal principal). Ce théorème a été démontré par E. Artin et Ph. Furtwängler. Le cas où K/k est une extension cyclique et $[K : k] = p$, un nombre premier, a été étudié par Hilbert dans son théorème 94 (voir par exemple [6]) qui affirme qu'il y a au moins une classe non triviale dans k qui capitule dans K . De plus, Hilbert avait trouvé le résultat suivant : si $\text{Gal}(K/k) = \langle \sigma \rangle$, N la norme de K/k , U_k

le groupe des unités de k , U_K le groupe des unités de K et U^* le sous-groupe des unités de U_K dont la norme est égale à 1. Alors le groupe des classes de k qui capitulent dans K est isomorphe au groupe quotient $U^*/U_K^{1-\sigma} = H^1(U_K)$, le groupe cohomologique de U_K de dimension 1.

A l'aide de ce résultat et d'autre résultats, on montre le théorème suivant :

Théorème 1. Soit K/k une extension cyclique de degré un nombre premier, alors le nombre des classes qui capitulent dans K/k est égale à : $[K : k][E_k : N(E_K)]$

Soit $d = 2p_1p_2$, avec p_1 et p_2 deux nombres premiers tels que $p_1 \equiv p_2 \equiv 1 \pmod{4}$ et au moins deux des éléments $\{(\frac{2}{p_1}), (\frac{2}{p_2}), (\frac{p_1}{p_2})\}$ valent -1 et $\mathbb{k} = \mathbb{Q}(\sqrt{d}, i)$. On note par $C_{\mathbb{k},2}$ le 2-groupe de classes de \mathbb{k} , $\mathbb{k}^{(*)}$ le corps de genres de \mathbb{k} et $\mathbb{k}_2^{(1)}$ le corps de classes de Hilbert de \mathbb{k} . Notre but est d'étudier le problème de capitulation dans les extensions quadratiques abéliennes sur \mathbb{Q} non ramifiées sur \mathbb{k} .

D'après [5], $C_{\mathbb{k},2}$ est de type $(2, 2, 2)$ et $[\mathbb{k}^{(*)} : \mathbb{k}] = 4$. Alors le rang du 2-groupe de classes est égal à 3, ainsi \mathbb{k} admet sept extensions quadratiques non ramifiées dans $\mathbb{k}_2^{(1)}$. Notons $K_1 = \mathbb{k}(\sqrt{p_1})$, $K_2 = \mathbb{k}(\sqrt{p_2})$ et $K_3 = \mathbb{k}(\sqrt{2})$. On définit d'abord les générateurs de $C_{\mathbb{k},2}$.

II. LES GÉNÉRATEURS DE $C_{\mathbb{k},2}$.

Soient a un entier naturel sans facteurs carrés et Q l'indice d'unités du corps $\mathbb{Q}(\sqrt{a}, i)$, alors on a :

Lemme 1 ([5]). Si l'une des conditions suivantes est vérifiée, alors $Q = 1$.

- 1) a est congru à 1 modulo 4.
- 2) Il existe un entier impair a' qui divise a tel que $a' \equiv 5 \pmod{8}$.

Lemme 2 ([5]). Si $d = 2p_1p_2$ avec p_1 et p_2 sont deux nombres premiers tels que $p_1 \equiv$

$p_2 \equiv 1 \pmod{4}$ et au moins deux des éléments $\{(\frac{p_1}{p_2}), (\frac{2}{p_1}), (\frac{2}{p_2})\}$ valent -1 , alors la norme de l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{2p_1p_2})$ est égale à -1 .

Proposition 1. Soient d un entier naturel sans facteurs carrés, $k = \mathbb{Q}(\sqrt{d}, i)$, $a+ib$ un élément de $\mathbb{Q}(i)$ tel que $\sqrt{a^2+b^2} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ et \mathcal{H} un idéal de k tel que $\mathcal{H}^2 = (a+ib)$. Alors \mathcal{H} est d'ordre 2 dans k .

Preuve: Soient $a+ib$ un élément de $\mathbb{Q}(i)$ et \mathcal{H} un idéal de k tels que $\sqrt{a^2+b^2} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ et $\mathcal{H}^2 = (a+ib)$. On suppose que \mathcal{H} est principal, alors il existe un $\alpha \in k$ et une unité ε de k tels que

$$\alpha^2 = (a+ib)\varepsilon. \quad (1)$$

Soit ε_d l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, alors un SFU de k est $\{\varepsilon_d\}$ ou $\{\sqrt{i\varepsilon_d}\}$; dans ce dernier cas ε_d est de norme 1. Donc on se ramène aux cas $\varepsilon \in \{\pm 1, \pm i, \varepsilon_d, i\varepsilon_d\}$ ou $\varepsilon \in \{\pm 1, \pm i, \varepsilon_d, i\varepsilon_d, \sqrt{i\varepsilon_d}, \sqrt{i\varepsilon_d}\}$.

- Si $\varepsilon \in \{\pm 1, \pm i, \varepsilon_d, i\varepsilon_d\}$, alors en appliquant la norme $N_{k/\mathbb{Q}(\sqrt{d})}$ à l'équation (1), on trouve que a^2+b^2 est un carré dans $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, ce qui est n'est pas le cas.
- Si $\varepsilon = \sqrt{i\varepsilon_d}$ ou $\varepsilon = i\sqrt{i\varepsilon_d}$, alors la norme $N_{k/\mathbb{Q}(i)}$ appliqué à l'équation (1), nous donne que i est un carré dans $\mathbb{Q}(i)$, ce qui est absurde.

Donc \mathcal{H} est d'ordre 2 dans k . ■

On procède comme dans la proposition (8) de l'article [2], pour prouver la proposition suivante :

Proposition 2. Soient d un entier composé, pair, sans facteurs carrés et produit d'au moins trois nombres premiers, $k = \mathbb{Q}(\sqrt{d}, i)$, p un nombre premier impair et \mathcal{H} un idéal de k tel que $\mathcal{H}^2 = (p)$. Notons par $\varepsilon_d = x + y\sqrt{d}$ et $\mathbf{C}_{k,2}$, l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ et le 2-groupe de classes de k respectivement. Alors on a :

(1) Si la norme de ε_d est égale -1 , alors \mathcal{H} est d'ordre 2 dans $\mathbf{C}_{k,2}$.

(2) Si la norme ε_d est égale à 1, on a :

(i) Si $\{\varepsilon_d\}$ est SFU de k , alors \mathcal{H} est principal si et seulement si $2p(x \pm 1)$ ou $p(x \pm 1)$ est un carré dans \mathbb{N} .

(ii) Sinon, \mathcal{H} est d'ordre 2 dans $\mathbf{C}_{k,2}$.

On peut alors citer le résultat :

Théorème 2. Soient $k = \mathbb{Q}(\sqrt{d}, i)$ où $d = 2p_1p_2$ avec p_1 et p_2 sont deux nombres premiers

tels que $p_1 \equiv p_2 \equiv 1 \pmod{4}$. Posons $p_1 = \pi_1\pi_2$, où π_1 et π_2 sont dans $\mathbb{Z}[i]$, notons par \mathcal{H}_0 , \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 les idéaux de k au dessus de $1+i$, π_1 et π_2 respectivement. Si la norme de l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ est égale à -1 , alors le groupe engendré par les classes de \mathcal{H}_0 , \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 est de type $(2, 2, 2)$.

Preuve: Les nombres π_1 et π_2 sont des premiers ramifiés dans $k/\mathbb{Q}(i)$, alors ils existent des idéaux premiers \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 de k tels que : $\pi_j\mathcal{O}_k = (\pi_j) = \mathcal{H}_j^2$, ($j \in \{1, 2\}$), où \mathcal{O}_k est l'anneau des entiers du corps k . D'autre part 2 est totalement ramifié dans k , donc il existe un idéal premier \mathcal{H}_0 de k tel que $\mathcal{H}_0^2 = (1+i)\mathcal{O}_k$.

Comme la norme de l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ est égale à -1 , alors Q , l'indice d'unités de k , est égal à 1. On a $\mathcal{H}_0^2 = (1+i)$, $\mathcal{H}_1^2 = (e+2if)$ et $\mathcal{H}_2^2 = (e-2if)$, or $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ et $\sqrt{e^2+(\pm 2f)^2} = \sqrt{p_1} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, alors d'après la proposition (1) \mathcal{H}_0 , \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 sont d'ordre 2 dans k . De plus $(\mathcal{H}_1\mathcal{H}_2)^2 = (p_1)$, alors d'après la proposition (2) l'idéal $\mathcal{H}_1\mathcal{H}_2$ est d'ordre 2 dans k , d'autre part on a $(\mathcal{H}_0\mathcal{H}_1)^2 = ((e-2f)+i(e+2f))$ et $(\mathcal{H}_0\mathcal{H}_2)^2 = ((e+2f)+i(e-2f))$ et $\sqrt{(e-2f)^2+(e+2f)^2} = \sqrt{2p_1} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, donc d'après la proposition (1) $\mathcal{H}_0\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_0\mathcal{H}_2$ sont d'ordre 2 dans k ; enfin $(\mathcal{H}_0\mathcal{H}_1\mathcal{H}_2)^2 = ((1+i)\pi_1\pi_2) = (p_1+ip_1)$ et comme $\sqrt{p_1^2+p_1^2} = p_1\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, alors $\mathcal{H}_0\mathcal{H}_1\mathcal{H}_2$ est d'ordre 2 dans k . Et ceci montre que le sous-groupe du 2-groupe de classes de k , engendré par les classes de \mathcal{H}_0 , \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 , est de type $(2, 2, 2)$. ■

Corollaire 1. Gardons les hypothèses du théorème précédent et notons par $\mathbf{C}_{k,2}$ la 2-partie du groupe de classes de k . Si $\mathbf{C}_{k,2}$ est de type $(2, 2, 2)$, alors au moins deux des éléments $\{(\frac{p_1}{p_2}), (\frac{2}{p_1}), (\frac{2}{p_2})\}$ valent -1 . Dans ce cas on a : $\mathbf{C}_{k,2} = \langle [\mathcal{H}_0], [\mathcal{H}_1], [\mathcal{H}_2] \rangle$

Preuve: D'après le théorème (2) on a $\langle [\mathcal{H}_0], [\mathcal{H}_1], [\mathcal{H}_2] \rangle$ est de type $(2, 2, 2)$, par suite $\mathbf{C}_{k,2} = \langle [\mathcal{H}_0], [\mathcal{H}_1], [\mathcal{H}_2] \rangle$, or d'après [5] $\mathbf{C}_{k,2}$ est de type $(2, 2, 2)$ si et seulement si deux au moins des éléments $\{(\frac{p_1}{p_2}), (\frac{2}{p_1}), (\frac{2}{p_2})\}$ valent -1 . ■

III. CAPITULATION DANS LES EXTENSIONS

K_1, K_2 ET K_3

A. Capitulation dans les extensions K_1 et K_2

Commençons cette partie par rappeler quelques résultats que nous serons utiles dans la suite.

Soient m et n deux entiers naturels différents et sans facteurs carrés, ε_1 (resp ε_2 , ε_3) l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ (resp $\mathbb{Q}(\sqrt{n})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{mn})$). On suppose que ε_1 , ε_2 et ε_3 sont de norme -1. On pose $K_0 = \mathbb{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{n})$ et $K = K_0(i)$.

Proposition 3 ([3]). 1) Si $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3$ est un carré dans K_0 , alors $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3}\}$ est un SFU de K_0 .

2) sinon $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est un SFU de K_0 .

Proposition 4 ([3]). On note par Q l'indice d'unité de K , alors on a :

1) Si $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3}\}$ est un SFU de K_0 , alors $Q = 1$.

2) Si $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est un SFU de K_0 , alors $Q = 2$ ssi $2\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3$ est un carré dans K_0 .

3) Si $Q = 2$, alors $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{i \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3}\}$ est un SFU de K .

Lemme 3 ([1]). Soient p un nombre premier impair et $\varepsilon = x + y\sqrt{2p}$ l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{2p})$. On suppose que ε est de norme 1. Alors $x \pm 1$ est un carré dans \mathbb{N} et 2ε est un carré dans $\mathbb{Q}(\sqrt{2p})$.

Proposition 5. On garde les notations et les hypothèses précédentes et désignant par p et q deux nombres premiers congrus à 1 (mod 4). Posons $m = p$ et $n = 2q$. Alors $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3}\}$ ou $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{i \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3}\}$ est SFU de K .

Preuve: Soient ε_1 (resp ε_2 , ε_3) l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ (resp $\mathbb{Q}(\sqrt{2q})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2pq})$), comme p et q sont congrus à 1 (mod 4), alors ils existent π_1 , π_2 , π_3 et π_4 dans $\mathbb{Z}[i]$ tels que $p = \pi_1 \pi_2$, $q = \pi_3 \pi_4$, $\bar{\pi}_1 = \pi_2$ et $\bar{\pi}_3 = \pi_4$ (le conjugué complexe). Posons $\varepsilon_1 = x + y\sqrt{p}$ l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$, où x et y sont des entiers ou des semi-entiers.

(a) Supposons que x et y sont des entiers. Comme la norme de ε_1 est égale -1, alors $(x - i)(x + i) = py^2$ et le pgcd de $x - i$ et $x + i$ est un diviseur de 2, donc il existent y_1 et y_2 dans $\mathbb{Z}[i]$ tels que $y = y_1 y_2$ et $\begin{cases} x + i = y_1^2 \pi_1 \\ x - i = y_2^2 \pi_2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x + i = i y_1^2 \pi_1 \\ x - i = -i y_2^2 \pi_2 \end{cases}$. Par suite $2x = y_1^2 \pi_1 + y_2^2 \pi_2$ ou $2x = i y_1^2 \pi_1 - i y_2^2 \pi_2$, il s'en suit alors que $2\varepsilon_1 = (y_1 \sqrt{\pi_1} + y_2 \sqrt{\pi_2})^2$ ou $2\varepsilon_1 = (y_1 \sqrt{i \pi_1} + y_2 \sqrt{-i \pi_2})^2$ d'où $\sqrt{2\varepsilon_1} = y_1 \sqrt{\pi_1} + y_2 \sqrt{\pi_2}$ ou $\sqrt{\varepsilon_1} =$

$y_1(1 + i)\sqrt{\pi_1} + y_2(1 - i)\sqrt{\pi_2}$, on conclut que :

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{2\pi_1 \varepsilon_1} &= y_1 \pi_1 + y_2 \sqrt{p}, \text{ et} \\ \sqrt{2\pi_2 \varepsilon_1} &= y_1 \sqrt{p} + y_2 \pi_2, \text{ ou} \\ \sqrt{\pi_1 \varepsilon_1} &= y_1(1 + i)\pi_1 + \\ &y_2(1 - i)\sqrt{p} \text{ et} \\ \sqrt{\pi_2 \varepsilon_1} &= y_1(1 + i)\sqrt{p} + \\ &y_2(1 - i)\pi_2. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

(b) Soit $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}(x + y\sqrt{p})$ avec x et y sont des entiers impairs, alors on a $(x - 2i)(x + 2i) = \pi_1 \pi_2 y^2$, on procède comme précédemment on trouve les mêmes résultats.

c) Posons de même $\varepsilon_2 = \alpha + \beta\sqrt{2q}$ avec α et β deux entiers, on trouve aussi que :

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{2(1 + i)\pi_3 \varepsilon_2} &= \beta_1(1 + i)\pi_3 + \\ &\beta_2 \sqrt{2q} \text{ et} \\ \sqrt{2(1 - i)\pi_4 \varepsilon_2} &= \beta_1 \sqrt{2q} + \\ &\beta_2(1 - i)\pi_4 \text{ ou} \\ \sqrt{(1 + i)\pi_3 \varepsilon_2} &= \frac{1}{2}(\beta_1(1 + i)(1 \pm \\ &i)\pi_3 + \beta_2(1 \mp i)\sqrt{2q}) \text{ et} \\ \sqrt{(1 - i)\pi_4 \varepsilon_2} &= \frac{1}{2}(\beta_1(1 \pm \\ &i)\sqrt{2q} + \beta_2(1 - i)(1 \mp i)\pi_4). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

(d) On applique le même argument à ε_3 on trouve aussi que :

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{2(1 + i)\pi_1 \pi_3 \varepsilon_3} &= y_1(1 + i)\pi_1 \pi_3 \\ &+ y_2 \sqrt{2pq} \text{ et} \\ \sqrt{2(1 - i)\pi_2 \pi_4 \varepsilon_3} &= y_1 \sqrt{2pq} \\ &+ y_2(1 - i)\pi_2 \pi_4 \text{ ou} \\ \sqrt{(1 + i)\pi_1 \pi_3 \varepsilon_3} &= \frac{1}{2}(y_1(1 + i) \\ &(1 \pm i)\pi_1 \pi_3 + y_2(1 \mp i)\sqrt{2pq}) \text{ et} \\ \sqrt{(1 - i)\pi_2 \pi_4 \varepsilon_3} &= \frac{1}{2}(y_1(1 \pm i) \\ &\sqrt{2pq} + y_2(1 \mp i)(1 - i)\pi_2 \pi_4). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

En multipliant les résultats des égalités (2), (3) et (4), on trouve que $\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3} \in K_0$ ou bien $\sqrt{2\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3} \in K_0$, remarquons enfin que $\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3}$ et $\sqrt{2\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3}$ ne sont pas tous les deux dans K_0 , sinon on aura $\sqrt{2} \in K_0$ ce qui est faux. La suite est une déduction simple des propositions (3) et (4). ■

Proposition 6. Gardons les hypothèses de la proposition (5) et supposons que la norme de ε_2 est égale à 1. Alors le SFU de K_0 est $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ et celui de K est $\{\varepsilon_1, \sqrt{i \varepsilon_2}, \varepsilon_3\}$.

Preuve: Comme la norme de ε_2 est égale à 1, alors d'après le lemme (3), $x \pm 1$ est un carré dans \mathbb{N} et $2\varepsilon_2$ est un carré dans $\mathbb{Q}(\sqrt{2q})$ ($\varepsilon_2 = x + y\sqrt{2q}$), de plus ε_2 n'est pas un carré dans K_0 , sinon on trouve que $\sqrt{2} \in K_0$, ce qui est absurde. Comme ε_1 et ε_2 ont pour norme

-1 , alors elles ne sont pas des carrés dans K_0 . De même $\varepsilon_1\varepsilon_2$, $\varepsilon_1\varepsilon_3$, $\varepsilon_2\varepsilon_3$ et $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$ ne sont pas des carrés dans K_0 , sinon on trouve que $i \in K_0$, ce qui est absurde. Donc $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est un SFU de K_0 et comme $2\varepsilon_2$ est un carré dans K_0 , alors d'après [3], $\{\varepsilon_1, \sqrt{i\varepsilon_2}, \varepsilon_3\}$ est un SFU de K . ■

Théorème 3. Soit le corps $\mathbb{k} = \mathbb{Q}(\sqrt{2p_1p_2}, i)$ avec p_1 et p_2 deux nombres premiers congrus à 1 (mod 4) et au moins deux des éléments $(\frac{p_1}{p_2})$, $(\frac{2}{p_1})$, $(\frac{2}{p_2})$ valent -1 et soit $\mathbf{C}_{\mathbb{k},2}$ le 2-groupe de classes de \mathbb{k} . Posons $\mathbb{K}_1 = \mathbb{k}(\sqrt{p_1}) = \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \sqrt{2p_2}, i)$, $\mathbb{K}_2 = \mathbb{k}(\sqrt{p_2}) = \mathbb{Q}(\sqrt{p_2}, \sqrt{2p_1}, i)$, $p_1 = e^2 + (2f)^2$ et $p_1 = \pi_1\pi_2 = (e + 2if)(e - 2if)$. Soient \mathcal{H}_0 , \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 les idéaux de \mathbb{k} au dessus de $1 + i$, π_1 et π_2 respectivement, alors exactement quatre classes de $\mathbf{C}_{\mathbb{k},2}$ capitulent dans \mathbb{K}_1 et \mathbb{K}_2 , de plus $\ker j_{\mathbb{K}_1} = \langle [\mathcal{H}_1], [\mathcal{H}_2] \rangle$ et $\ker j_{\mathbb{K}_2} = \langle [\mathcal{H}_0\mathcal{H}_1], [\mathcal{H}_0\mathcal{H}_2] \rangle$.

Preuve: Comme $p_1 \equiv p_2 \equiv 1 \pmod{4}$, alors la norme de l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1})$ (resp $\mathbb{Q}(\sqrt{p_2})$) est égale à -1 , et d'après le lemme (2) la norme de l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{2p_1p_2})$ est égale à -1 . Donc d'après les proposition (5) et (6), \mathbb{K}_j , où $j \in \{1, 2\}$, a pour SFU l'un des trois systèmes $\{\varepsilon_1, \sqrt{i\varepsilon_2}, \varepsilon_3\}$ ou $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{i\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}\}$ ou $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{i\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}\}$. On note par $E_{\mathbb{K}_j}$ le groupe des unités de \mathbb{K}_j , alors $E_{\mathbb{K}_j} = \langle i, \varepsilon_1, \sqrt{i\varepsilon_2}, \varepsilon_3 \rangle$ ou $E_{\mathbb{K}_j} = \langle i, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{i\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3} \rangle$ ou $E_{\mathbb{K}_j} = \langle i, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{i\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3} \rangle$. Donc $N_{\mathbb{K}_j/\mathbb{k}}(E_{\mathbb{K}_j}) = \langle i, \varepsilon_3^2 \rangle$ (dans ce cas la norme de l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{2p_2})$ (resp $\mathbb{Q}(\sqrt{2p_1})$) est 1) ou $N_{\mathbb{K}_j/\mathbb{k}}(E_{\mathbb{K}_j}) = \langle -1, \varepsilon_3 \rangle$ ou $N_{\mathbb{K}_j/\mathbb{k}}(E_{\mathbb{K}_j}) = \langle -1, i\varepsilon_3 \rangle$, d'autre part on sait d'après [3] que le groupe d'unités de \mathbb{k} est $E_{\mathbb{k}} = \langle i, \varepsilon_3 \rangle$, d'où $[E_{\mathbb{k}} : N_{\mathbb{K}_j/\mathbb{k}}(E_{\mathbb{K}_j})] = 2$, donc d'après le théorème (1), le nombre des classes qui capitulent dans \mathbb{K}_j est égale à 4.

Dans la suite on va déterminer ces classes dans chaque cas :

- (i) $\ker j_{\mathbb{K}_1} = \langle [\mathcal{H}_1], [\mathcal{H}_2] \rangle$. En effet
- Comme $(\mathcal{H}_1\mathcal{H}_2)^2 = (\pi_1\pi_2) = (p_1)$, alors $\mathcal{H}_1\mathcal{H}_2 = (\sqrt{p_1})$, donc l'idéal $\mathcal{H}_1\mathcal{H}_2$ capitule dans \mathbb{K}_1 .
- Montrons que $[\mathcal{H}_2]$ la classe de \mathcal{H}_2 capitule dans \mathbb{K}_1 . D'après la démonstration de la proposition (5), on a : $\sqrt{2\pi_2\varepsilon_1} \in \mathbb{K}_1$ ou $\sqrt{\pi_2\varepsilon_1} \in \mathbb{K}_1$, où ε_1 est l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1})$, alors ils existent α et β dans \mathbb{K}_1 tels que $2\pi_2\varepsilon_1 = \alpha^2$ ou $\pi_2\varepsilon_1 = \beta^2$, donc $(2\pi_2) = (\alpha^2)$ ou $(\pi_2) = (\beta^2)$, or $\mathcal{H}_0^2 = (1+i)$

et $\mathcal{H}_2^2 = (\pi_2)$, alors $(1+i)\mathcal{H}_2 = (\alpha)$ ou $\mathcal{H}_2 = (\beta)$, par suite $\mathcal{H}_2 = (\frac{\alpha}{1+i})$ ou $\mathcal{H}_2 = (\beta)$, donc \mathcal{H}_2 capitule dans \mathbb{K}_1 .

Comme $[\mathcal{H}_1\mathcal{H}_2]$ et $[\mathcal{H}_2]$ sont principaux dans \mathbb{K}_1 , alors $[\mathcal{H}_1\mathcal{H}_2\mathcal{H}_2] = [\mathcal{H}_1]$ est principal dans \mathbb{K}_1 . Par suite $\ker j_{\mathbb{K}_1} = \langle [\mathcal{H}_1], [\mathcal{H}_2] \rangle$.

(ii) Montrons que $\ker j_{\mathbb{K}_2} = \langle [\mathcal{H}_0\mathcal{H}_1], [\mathcal{H}_0\mathcal{H}_2] \rangle$, on sait que $\mathbb{K}_2 = \mathbb{k}(\sqrt{p_2}) = \mathbb{Q}(\sqrt{p_2}, \sqrt{2p_1}, i)$, $p_1 = \pi_1\pi_2$ et $p_2 = \pi_3\pi_4$, désignons par ε_1 (resp ε_3) l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{p_2})$ (resp $\mathbb{Q}(\sqrt{2p_1p_2})$), alors en multipliant les résultats des égalités (2) et (4) on trouve que $\sqrt{(1+i)\pi_1\varepsilon_1\varepsilon_3} \in \mathbb{K}_2$ et $\sqrt{(1-i)\pi_2\varepsilon_1\varepsilon_3} \in \mathbb{K}_2$, donc il existe α et β dans \mathbb{K}_2 tels que $\mathcal{H}_0^2\mathcal{H}_1^2 = (\alpha^2)$ et $\mathcal{H}_0^2\mathcal{H}_2^2 = (\beta^2)$, alors $\mathcal{H}_0\mathcal{H}_1 = (\alpha)$ et $\mathcal{H}_0\mathcal{H}_2 = (\beta)$, d'où $\mathcal{H}_0\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_0\mathcal{H}_2$ capitulent dans \mathbb{K}_2 . ■

B. Capitulation dans l'extension \mathbb{K}_3

Soient p_1 et p_2 deux nombres premiers congrus à 1 (mod 4), $\mathbb{k} = \mathbb{Q}(\sqrt{2p_1p_2}, i)$, $\mathbb{K}_3 = \mathbb{k}(\sqrt{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{p_1p_2}, i)$, $\mathbb{K}_3^+ = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{p_1p_2})$, ε_1 (resp. $\varepsilon_2, \varepsilon_3$) l'unité fondamentale de $k_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ (resp. $k_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{p_1p_2})$, $k_3 = \mathbb{Q}(\sqrt{2p_1p_2})$), $I = \{0, 1\}$ et $E_{\mathbb{k}}$ (resp. $E_{\mathbb{K}_3}$) le groupe d'unité de \mathbb{k} (resp. \mathbb{K}_3). On sait que ε_1 et ε_3 sont de normes -1 , par contre ε_2 est de norme ± 1 .

Lemme 4 ([1]). Soient d un entier relatif sans facteur carré et $\varepsilon = x + y\sqrt{d}$ l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ où x et y sont des entiers ou bien des semi-entiers. Si ε est de norme 1, alors $2(x \pm 1)$ et $2d(x \pm 1)$ ne sont pas des carrés dans \mathbb{Q} .

Lemme 5. Si la norme de $\varepsilon_2 = x + y\sqrt{p_1p_2}$ est égale à 1, alors $x \pm 1$ n'est pas un carré dans \mathbb{N} .

Preuve: Comme $p_1p_2 \equiv 1 \pmod{4}$, alors l'indice d'unité de $k_2(i)$ est égal à 1, donc $2\varepsilon_2$ n'est pas un carré dans k_2 , ceci implique que $x \pm 1$ n'est pas un carré dans \mathbb{N} . ■

Proposition 7. Supposons que la norme de ε_2 , l'unité fondamentale de $k_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{p_1p_2})$, est égale à 1, alors $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est un SFU de \mathbb{K}_3^+ et de \mathbb{K}_3 .

Preuve: Puisque ε_1 et ε_3 sont de normes -1 , alors elles ne sont pas des carrés dans \mathbb{K}_3^+ , de même $\varepsilon_1\varepsilon_2$, $\varepsilon_1\varepsilon_3$, $\varepsilon_2\varepsilon_3$ et $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$ ne sont pas des carrés dans \mathbb{K}_3^+ , sinon en prenant une norme convenable on trouve que $i \in \mathbb{K}_3^+$, ce qui est

faux. De plus $(2 + \sqrt{2})\varepsilon_1^i \varepsilon_2^j \varepsilon_3^k$ ne peut pas être un carré dans \mathbb{K}_3^+ , pour tout i, j et k de I , sinon il existe $\alpha \in \mathbb{K}_3^+$ tel que $\alpha^2 = (2 + \sqrt{2})\varepsilon_1^i \varepsilon_2^j \varepsilon_3^k$, alors $(N_{\mathbb{K}_3^+/\mathbb{K}_2}(\alpha))^2 = 2(-1)^{i+k} \varepsilon_2^{2j}$, ceci implique que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{p_1 p_2})$, ce qui est absurde.

(1) Soit $\varepsilon_2 = x + y\sqrt{p_1 p_2}$, avec x et y deux entiers, alors $x^2 - 1 = y^2 p_1 p_2$. d'après le lemme (4), $2(x \pm 1)$ et $2p_1 p_2(x \pm 1)$ ne sont pas des carrés dans \mathbb{N} , ainsi on a :

(i) Si $p_1 p_2(x \pm 1)$ est un carré dans \mathbb{N} , alors il existe $(y_1, y_2) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\begin{cases} x \mp 1 = y_1^2, \\ x \pm 1 = y_2^2 p_1 p_2. \end{cases}$ d'où $x \mp 1$ est un carré dans \mathbb{N} , et ceci contredit le lemme (5).

(ii) Soit $p_1(x \pm 1)$ ou $2p_1(x \pm 1)$ un carré dans \mathbb{N} . Si $p_1(x \pm 1)$ est un carré dans \mathbb{N} , alors il existe $(y_1, y_2) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\begin{cases} x \pm 1 = p_1 y_1^2, \\ x \mp 1 = p_2 y_2^2. \end{cases}$ $\sqrt{\varepsilon_2} = \frac{1}{2}(y_1 \sqrt{2p_1} + y_2 \sqrt{2p_2})$, donc $\sqrt{\varepsilon_2} \notin \mathbb{K}_3^+$, $\sqrt{p_1 \varepsilon_2} \in \mathbb{K}_3^+$ et $\sqrt{p_2 \varepsilon_2} \in \mathbb{K}_3^+$. On trouve les mêmes résultats pour le cas : $2p_1(x \pm 1)$.

(2) Soit $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}(x + y\sqrt{p_1 p_2})$, où x et y sont deux entiers impairs, comme ε_2 est de norme 1, alors $(x - 2)(x + 2) = y^2 p_1 p_2$, $(x + 2) - (x - 2) = 4$ et le pgcd de $x + 2$ et $x - 2$ divise 4, or $x + 2$ et $x - 2$ sont impairs, donc leur pgcd est égal à 1.

(i) Si $p_1 p_2(x \pm 2)$ un carré dans \mathbb{N} , alors il existe $(y_1, y_2) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\begin{cases} x \pm 2 = p_1 y_1^2, \\ x \mp 2 = p_2 y_2^2. \end{cases}$

D'où $\sqrt{\varepsilon_2} = \frac{1}{2}(y_1 \sqrt{p_1 p_2} + y_2)$, donc $\sqrt{\varepsilon_2} \in \mathbb{K}_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{p_1 p_2})$, ce qui est absurde puisque ε_2 est l'unité fondamentale de \mathbb{K}_2 . Donc ce cas ne se présente pas.

(ii) Si $p_1(x \pm 2)$ un carré dans \mathbb{N} , alors il existe $(y_1, y_2) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\begin{cases} x \pm 2 = p_1 y_1^2, \\ x \mp 2 = p_2 y_2^2. \end{cases}$ Donc on trouve que $\sqrt{\varepsilon_2} = \frac{1}{2}(y_1 \sqrt{2p_1} + y_2 \sqrt{2p_2})$, par suite $\sqrt{\varepsilon_2} \notin \mathbb{K}_3^+$, $\sqrt{p_1 \varepsilon_2} \in \mathbb{K}_3^+$ et $\sqrt{p_2 \varepsilon_2} \in \mathbb{K}_3^+$.

De tous ces résultats on déduit que $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est SFU de \mathbb{K}_3^+ et d'après [3], \mathbb{K}_3 a le même système fondamental d'unités que \mathbb{K}_3^+ . ■

Proposition 8. On suppose que la norme de ε_2 est égale à -1 , alors on a :

- (i) Si $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3$ est un carré dans \mathbb{K}_3^+ , alors $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3}\}$ est un SFU de \mathbb{K}_3^+ et de \mathbb{K}_3 .
(ii) Sinon $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est un SFU de \mathbb{K}_3^+ et de \mathbb{K}_3 .

Preuve: D'après la proposition (3), \mathbb{K}_3^+ a pour SFU $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3}\}$ ou $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$

suivant que $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3$ est un carré ou non dans \mathbb{K}_3^+ , de plus d'après [3], \mathbb{K}_3^+ et \mathbb{K}_3 ont même SFU. ■

Remarque 1. On procède comme dans la démonstration de la proposition (5), pour prouver ce qui suit :

a) $\varepsilon_2 = x + y\sqrt{p_1 p_2}$

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{\varepsilon_2} &= y_1 \sqrt{\pi_1 \pi_3} + y_2 \sqrt{\pi_2 \pi_4}, \text{ ou} \\ \sqrt{\varepsilon_2} &= y_1 \sqrt{\pi_1 \pi_4} + y_2 \sqrt{\pi_2 \pi_3}, \text{ ou} \\ \sqrt{2\varepsilon_2} &= y_1 \sqrt{\pi_1 \pi_3} + y_2 \sqrt{\pi_2 \pi_4}, \text{ ou} \\ \sqrt{2\varepsilon_2} &= y_1 \sqrt{\pi_1 \pi_4} + y_2 \sqrt{\pi_2 \pi_3}, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

où les y_i sont dans $\mathbb{Z}[i]$ ou $\frac{1}{2}\mathbb{Z}[i]$.

b) De même en posant $\varepsilon_3 = a + b\sqrt{2p_1 p_2}$, on montre que :

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{\varepsilon_3} &= b_1 \sqrt{(1+i)\pi_1 \pi_3} + b_2 \sqrt{(1-i)\pi_2 \pi_4}, \text{ ou} \\ \sqrt{\varepsilon_3} &= b_1 \sqrt{(1+i)\pi_1 \pi_4} + b_2 \sqrt{(1-i)\pi_2 \pi_3}, \text{ ou} \\ \sqrt{2\varepsilon_3} &= b_1 \sqrt{(1+i)\pi_1 \pi_3} + b_2 \sqrt{(1-i)\pi_2 \pi_4}, \text{ ou} \\ \sqrt{2\varepsilon_3} &= b_1 \sqrt{(1+i)\pi_1 \pi_4} + b_2 \sqrt{(1-i)\pi_2 \pi_3}, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

où les b_i sont dans $\mathbb{Z}[i]$ ou $\frac{1}{2}\mathbb{Z}[i]$. Remarquons en fin que :

$$\sqrt{2\varepsilon_1} = \sqrt{1+i} + \sqrt{1-i}. \quad (7)$$

Alors en multipliant les résultats des égalités (5), (6) et (7) on trouve, dans le cas où $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3$ n'est pas un carré dans $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{p_1 p_2})$, que $\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3} = \alpha \sqrt{p_1} + \beta \sqrt{p_2} + \gamma \sqrt{2p_1} + \delta \sqrt{2p_2}$, où α, β, γ et δ sont dans \mathbb{Q} .

Théorème 4. Soient le corps $\mathbb{k} = \mathbb{Q}(\sqrt{2p_1 p_2}, i)$, avec p_1 et p_2 deux nombres premiers congrus à 1 (mod 4) et au moins deux des éléments $(\frac{p_1}{p_2}), (\frac{2}{p_1}), (\frac{2}{p_2})$ valent -1 et $\mathbf{C}_{\mathbb{k},2}$ le 2-groupe de classes de \mathbb{k} . Posons $\mathbb{K}_3 = \mathbb{k}(\sqrt{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{p_1 p_2}, i)$, $p_1 = e^2 + (2f)^2 = \pi_1 \pi_2 = (e + 2if)(e - 2if)$. Soient $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1$ et \mathcal{H}_2 les idéaux de \mathbb{k} au dessus de $1 + i, \pi_1$ et π_2 respectivement. Notons par Q l'indice des unités de $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{p_1 p_2})$, d'où on a :

- 1) Si $Q = 1$, alors quatre classes de $\mathbf{C}_{\mathbb{k},2}$ capitulent dans \mathbb{K}_3 et $\ker j_{\mathbb{K}_3} = \langle [\mathcal{H}_0], [\mathcal{H}_1 \mathcal{H}_2] \rangle$.
2) Si $Q = 2$, alors deux classes de $\mathbf{C}_{\mathbb{k},2}$ capitulent dans \mathbb{K}_3 et $\ker j_{\mathbb{K}_3} = \langle [\mathcal{H}_0] \rangle$.

Preuve: Remarquons d'abord que $\sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \in \mathbb{K}_3$.

(1) Si $Q = 1$, alors la norme de ε_2 est égale à 1 ou la norme de ε_2 est égale à -1 et $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$ n'est pas un carré dans $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{p_1p_2})$, donc d'après les propositions (7) et (8) $E_{\mathbb{K}_3} = \langle \sqrt{i}, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \rangle$, ce qui implique que $N_{\mathbb{K}_3/\mathbb{K}}(E_{\mathbb{K}_3}) = \langle i, \varepsilon_3^2 \rangle$, or $E_{\mathbb{K}} = \langle i, \varepsilon_3 \rangle$, d'où $[E_{\mathbb{K}} : N_{\mathbb{K}_3/\mathbb{K}}(E_{\mathbb{K}_3})] = 2$, alors d'après le théorème (1), quatre classes capitulent dans \mathbb{K}_3 .

Montrons que $[\mathcal{H}_0]$ et $[\mathcal{H}_1\mathcal{H}_2]$ sont principaux dans \mathbb{K}_3 .

On remarque que $\sqrt{(1+i)\varepsilon_1} = \frac{1}{2}[2 + (1+i)\sqrt{2}] \in \mathbb{K}_3$, alors il existe un $\alpha \in \mathbb{K}_3$ tel que $(1+i)\varepsilon_1 = \alpha^2$, et comme $\mathcal{H}_0^2 = (1+i)$ et ε_1 est une unité de \mathbb{K}_3 , alors $\mathcal{H}_0^2 = (\alpha^2)$, d'où $\mathcal{H}_0 = (\alpha)$.

Si la norme de ε_2 est égale à 1, alors on a, d'après la démonstration de la proposition (7), que $\sqrt{p_1\varepsilon_2} \in \mathbb{K}_3$, donc il existe un $\beta \in \mathbb{K}_3$ tel que $p_1\varepsilon_2 = \beta^2$, d'où $(p_1) = (\beta^2)$, or $(\mathcal{H}_1\mathcal{H}_2)^2 = (p_1)$, donc $(\mathcal{H}_1\mathcal{H}_2)^2 = (\beta^2)$, on conclut que $\mathcal{H}_1\mathcal{H}_2 = (\beta)$.

Si la norme de ε_2 est égale à -1 et $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$ n'est pas un carré dans $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{p_1p_2})$, alors d'après la remarque (1), $\sqrt{p_1\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3} \in \mathbb{K}_3$, ceci implique $\mathcal{H}_1\mathcal{H}_2$ capitule dans \mathbb{K}_3 . Donc $\ker j_{\mathbb{K}_3} = \langle [\mathcal{H}_0], [\mathcal{H}_1\mathcal{H}_2] \rangle$.

(2) Si $Q = 2$, alors la norme de ε_2 est égale à -1 et $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$ est un carré dans $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{p_1p_2})$, par suite d'après la proposition (8) on a : $E_{\mathbb{K}_3} = \langle \sqrt{i}, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3} \rangle$, d'où $N_{\mathbb{K}_3/\mathbb{K}}(E_{\mathbb{K}_3}) = \langle i, \varepsilon_3 \rangle$, et comme $E_{\mathbb{K}} = \langle i, \varepsilon_3 \rangle$, alors $[E_{\mathbb{K}} : N_{\mathbb{K}_3/\mathbb{K}}(E_{\mathbb{K}_3})] = 1$, donc le théorème (1) implique que deux classes capitulent dans \mathbb{K}_3 . Et d'après la démonstration faite dans (1), on a : $\ker j_{\mathbb{K}_3} = \langle [\mathcal{H}_0] \rangle$. Et ceci achève la démonstration du théorème. ■

Des théorèmes (3) et (4) découle le théorème :

Théorème 5. Soit le corps $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{2p_1p_2}, i)$ avec p_1 et p_2 deux nombres premiers congrus à 1 (mod 4) et au moins deux des éléments $\{(\frac{p_1}{p_2}), (\frac{2}{p_1}), (\frac{2}{p_2})\}$ valent -1 et soit $\mathbf{C}_{\mathbb{K},2}$ le 2-groupe de classes de \mathbb{K} . Posons \mathbb{K}^* le corps de genres de \mathbb{K} , $p_1 = e^2 + (2f)^2$ et $p_1 = \pi_1\pi_2 = (e + 2if)(e - 2if)$. Soient \mathcal{H}_0 , \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 les idéaux de \mathbb{K} au dessus de $1 + i$, π_1 et π_2 respectivement. Alors toutes les classes capitulent dans \mathbb{K}^* c-à-d : $\ker j_{\mathbb{K}^*} = \mathbf{C}_{\mathbb{K},2}$.

RÉFÉRENCES

- [1] A. Azizi, *Sur la capitulation des 2-classes d'idéaux de $k = \mathbb{Q}(\sqrt{2pq}, i)$* , Acta Arith. **94** (2000), 383-399.
- [2] A. Azizi, *Construction de la tour des 2-corps de classes de Hilbert de certains corps biquadratiques*, Pac. J. Math. **208** (2003), 1-10.
- [3] A. Azizi, *Sur les unités de certains corps de nombres de degré sur \mathbb{Q}* , Ann. Sci. Math. Québec **29** (2005), no 2, 111-129.
- [4] A. Azizi, *Capitulation of the 2-ideal Classes of $\mathbb{Q}(\sqrt{d}, i)$ Where p_1 and p_2 are primes such that $p_1 \equiv 1 \pmod{8}$, $p_2 \equiv 5 \pmod{8}$ and $(\frac{p_1}{p_2}) = -1$* , Lecture notes in pure and applied mathematics, vol. **208** (1999), 13-19.
- [5] A. Azizi et M. Taous, *Determination des corps $\mathbf{k} = \mathbb{Q}(\sqrt{d}, i)$ dont le 2-groupes de classes est de type $(2, 4)$ ou $(2, 2, 2)$* , Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste. **40** (2008), 93-116.
- [6] K. Miyake, *Algebraic Investigations of Hilbert's theorem 94, The principal Ideal theorem and capitulation Problem*, Expos. Math. **7** (1989), 289-346.
- [7] Pierre Samuel, *Théorie Algébrique Des Nombres*, Hermann Paris, deuxième édition (1971)
- [8] H. Wada, *On the class number and the unit group of certain algebraic number fields*, J. Fac. Univ. Tokyo Sect. I **13** (1966), 201-209.